

TD 17 — Équations différentielles linéaires

Ribambelle d'équations différentielles

Exercice 1 — Équations différentielles linéaires du premier ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y .

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (x - 1)e^{2x}$. | 7. $\forall x \in \mathbb{R}, 3xy'(x) - 4y(x) = x$. |
| 2. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = \cos(2x)e^x$. | 8. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \sin(x)y(x) = 2\sin(x)$. |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = x^2 + 1$. | 9. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + e^x y(x) = 0$. |
| 4. $\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)y'(x) - 2xy(x) = x$. | 10. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = x^2(e^x + e^{-x})$. |
| 5. $\forall x \in \mathbb{R}, 3y'(x) + 2y(x) = x + e^{2x}$. | 11. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3$. |
| 6. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = \frac{1}{1 + e^x}$. | |

Exercice 2 — Équations différentielles linéaires du second ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y .

1. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 8y'(t) + 15y(t) = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = 2y'(x)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) = e^x \cos(x)$.
On cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto e^x (a \cos(x) + b \sin(x))$, avec a et b deux réels.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 8x - 16$.
On cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec a , b et c trois réels.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 3xe^x$.
On cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$, avec a , b et c réels.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)y''(x) + 2xy'(x) - 2 = 0$.

Exercice 3 — Dérivées successives d'une solution

On considère l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y .

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x^2.$$

1. Résoudre l'équation (E) .
2. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = f^{(n)}(0)$.

4. Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.$$

5. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n .

Des équations différentielles linéaires bien cachées

Exercice 4 — Une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x).$$

Exercice 5 — Une équation intégrale

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x , on ait :

$$3 \int_0^x f(t) dt = 2xf(x).$$

Exercice 6 — Un ordre deux qui cache bien son jeu

1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue z :

$$z'' - z = 0.$$

2. Résoudre alors l'équation différentielle (d'ordre 4) suivante d'inconnue y :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

Exercice 7 — Changement d'inconnue

Appelons (E) l'équation différentielle suivante (à coefficients non constants!), d'inconnue y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^2 y''(x) - 2e^x(1 + e^x)y'(x) - (3e^x + 1)y(x) = 0.$$

Dans cet exercice, on se propose de résoudre l'équation différentielle (E) par changement d'inconnue.

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Considérons la fonction $g: x \mapsto \frac{f(x)}{1 + e^x}$.

Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle (H) .
3. En déduire les solutions de l'équation (E) .